

Optimierung der Volumen Kennziffer eines Zwei-Wicklungs-Transformators

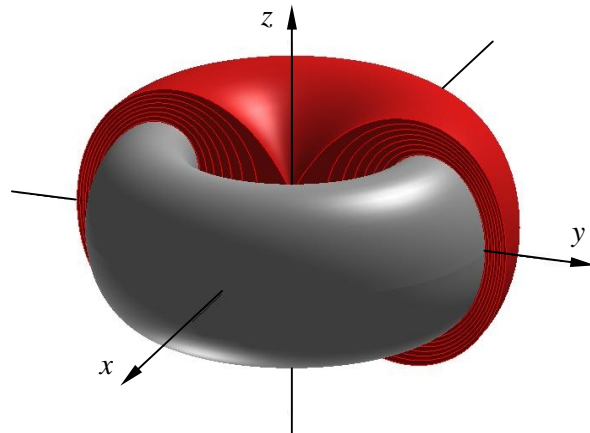
O. Papes, Dipl. Masch.-Ing. ETH
Doktorand am Zentrum für Mechanik / IMES / D-MAVT / ETHZ
Matrikelnummer: 98-915-994
Telefon: 01 / 632 77 54
E-Mail: ondrej.papes@imes.mavt.ethz.ch

Zusammenfassung:

In der vorliegenden Arbeit wird die Geometrie eines Zwei-Wicklungs-Transformators der toroidalen Bauweise in Hinsicht auf die Volumen Kennziffer z_v optimiert. Die Kontur des torusförmigen Kerns ist dabei der Freiheitsgrad der Optimierung. Es werden die exakten partiellen Differentialgleichungen hergeleitet, welche das Richtungsfeld der den Kern umschlingenden Wicklung beschreiben und mittels Charakteristikenmethode gelöst. Diese Methodik erlaubt es, einer beliebigen Kerngeometrie die Wicklungsgeometrie durch Lösen eines einfachen Nullstellenproblems sehr genau zuzuordnen. Aus dem Paar Kern / Wicklung ist dann die Volumen Kennziffer direkt ableitbar.

Für verschiedene Formen des Kerns werden die kleinst möglichen Volumen Kennziffern numerisch berechnet und das Fehlerintervall jeweils auf $\Delta z_v = \pm 10^{-6}$ eingeschränkt. So gelingt es für die minimale Volumen Kennziffer des klassischen Topftransformators rechteckiger Kernkontur neu den Wert $\min(z_v) = 10.568608 \pm 10^{-6}$ zu finden. Im letzten Schritt werden der Kerngeometrie drei charakteristische Abmessungen und 16 Fouriermoden als geometrische Freiheitsgrade zur Verfügung gestellt. Mit dieser Anordnung ist es möglich, die Volumen Kennziffer weiter auf $\min(z_v) = 10.073658 \pm 10^{-6}$ zu senken. Dies entspricht einer Einsparung von 6.117% gegenüber dem bis heute kleinsten bekannten Wert von $z_v = 10.73$ gemäss Erläuterungen des Dep. Informationstechnologie und Elektrotechnik der ETH Zürich.

$$\min(z_v) = 10.073658 \pm 10^{-6}$$



Die Kern- und Wicklungskonturen sind grundsätzlich als beliebig aufzufassen, müssen aber gewisse einschränkende Voraussetzungen erfüllen, um eine sinnvolle Transformatorgeometrie zu definieren. Es soll gelten:

- IV. Γ_K und Γ_W sind je zusammenhängende, stückweise stetig differenzierbare Kurven im ersten Quadranten der rz -Ebene. Die beiden Kurven sind überschneidungsfrei und beginnen und enden auf der r -Achse. Γ_W liegt ausserhalb des von Γ_K mit der r -Achse eingeschlossenen Gebietes.
- V. Der "Abstand" von Γ_W zu Γ_K soll so sein, dass die Wicklung eine konstante Querschnittsfläche $A_W = const.$ über die gesamte Umschlingung des Kerns aufweist. Somit kann sich in der Wicklung überall eine maximale, konstante Stromdichte einstellen.

Mit den bisherigen Annahmen und Definitionen ist es bereits möglich, die Zielgrösse z_V formal auszudrücken. Die Volumenkennziffer wird aus dem totalen Transformatorvolumen V_T , der Querschnittsfläche A_K des Kerns und der Querschnittsfläche A_W der Wicklung gebildet. Die Definitionen dieser Grössen lauten:

$$(1) \quad z_V = \frac{V_T}{(A_K A_W)^{3/4}}$$

$$(2) \quad V_T = 4\pi \int_{\Gamma_W} z r dr$$

$$(3) \quad A_K = 2 \int_{\Gamma_K} z dr$$

$$(4) \quad A_W = const. = \pi$$

Beachte, dass sich die Integrationen in (2) und (3) nur über den ersten Quadranten der rz -Ebene erstrecken. Ein Faktor 2 berücksichtigt also jeweils den spiegel-symmetrischen Teil des Transformators.

In (4) wurde für A_W bereits der feste Wert π gewählt. Diese Freiheit dürfen wir uns nehmen, denn die Volumenkennziffer ist invariant unter zentrischen Streckungen der Geometrie, nicht jedoch das Volumen oder die Querschnittsflächen. Ist also eine Bauform gefunden, dann kann sie immer noch unter Beibehaltung von z_V nachträglich skaliert werden bis (4) erfüllt ist und umgekehrt. Der Wert π ist deshalb vorteilhaft, weil im Falle einer bis zur z -Achse angeschlagenen Anordnung die Kernkontur bei $r = 1$ beginnt.

Unter Berücksichtigung der Punkte I. - V. und der Gleichungen (1) - (4) lässt sich die Aufgabenstellung nun folgendermassen präzise formulieren:

Finde die Kern- und Wicklungskonturen Γ_K und Γ_W so, dass die Volumenkennziffer z_V minimal wird.

Es wird sich zeigen, dass die Erfüllung von Punkt V., der die Bedeutung einer Nebenbedingung hat, die Hauptschwierigkeit der gesamten Aufgabe ist. Dieser Teilproblematik wird deshalb im Folgenden ein eigenes Kapitel gewidmet.

2. Konstruktion der Wicklungskontur

2.1 Gedanken zu Feldgrössen in Kern und Wicklung

Bisher wurden nur geometrische Rahmenbedingungen formuliert ohne die Funktion des Transformators zu studieren. Eine korrekte Auslegung verlangt jedoch ebenso, die elektromagnetischen Feldgrössen in Kern und Wicklung vorauszusagen und durch konstruktive Eingriffe zu kontrollieren.

Konkret geht es darum, einer Transformatorgeometrie die magnetische Induktion \vec{B} im Kern Ω_K und die Stromdichte \vec{j} in der Wicklung Ω_W als Funktionen von Ort und Zeit zuzuordnen. Da alle Grössen harmonische Funktionen in der Zeit t sind gemäss $\vec{f}(t, \vec{x}) = e^{i\omega t} \vec{\phi}(\vec{x})$, beschränken wir uns im Folgenden nur auf das Studium der entsprechenden Formfunktionen $\vec{\phi}(\vec{x})$ in Abhängigkeit des Ortes \vec{x} .

Gemäss Erläuterungen dürfen die folgenden konstruktiven Elemente zum Aufbau von Kern und Wicklung verwendet werden: Der Kern besteht aus einem infinitesimal dünnen, magnetisch isolierten Eisendraht unendlicher Permeabilität und die Wicklung aus infinitesimal dünnen, gegenseitig elektrisch voneinander isolierten Drähten unendlicher Leitfähigkeit. Die geschickte Verlegung dieser Leiterelemente erlaubt es, die Feldgrössen folgendermassen zu arrangieren:

$$(5) \quad \vec{B} = B_\phi(r, z) \vec{e}_\phi \quad \text{in } \Omega_K \quad (6) \quad \vec{j} = j_r(r, z) \vec{e}_r + j_z(r, z) \vec{e}_z \quad \text{in } \Omega_W$$

Hier sind $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z\}$ die gegenseitig orthogonalen Einheitsvektoren der zylindrischen Basis. Die magnetische Induktion wird somit nur in Umfangsrichtung geführt und der Strom fliesst ausschliesslich in der rz -Ebene. Damit sich in Kern und Wicklung überall die maximalen Werte von magnetischer Induktion und Stromdichte einstellen können, müssen die infinitesimalen Leiterelemente zudem eine konstante Querschnittsfläche aufweisen. Die Beträge der Feldgrössen sind somit fixiert gemäss $\|\vec{B}\| = \hat{B} = const.$ und $\|\vec{j}\| = \hat{j} = const.$ und wir erhalten:

$$(7) \quad B_\phi(r, z) = \hat{B}$$

$$(8) \quad j_r(r, z) = \hat{j} \cos(\alpha(r, z)) \quad (9) \quad j_z(r, z) = \hat{j} \sin(\alpha(r, z))$$

Bemerke, dass die Definition des Betrages die Gleichung für die magnetische Induktion bereits gelöst hat und im Falle der Stromdichte die Anzahl der Unbekannten von zwei (die beiden Komponenten $j_r(r, z)$ und $j_z(r, z)$) auf eins reduzieren konnte (die Orientierung $\alpha(r, z)$).

Damit (7) und (8) zulässige Lösungen sind, müssen sie die Maxwell'schen Differentialgleichungen und Randbedingungen erfüllen. In Anbetracht der niedrigen Betriebsfrequenzen sind kapazitive Effekte in der Wicklung vernachlässigbar, weshalb dort keine Ladungsakkumulation erfolgt. Es gilt somit in sehr guter Näherung:

$$(10) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{in } \Omega_K \quad \text{und} \quad \vec{B} \cdot \vec{n}_K = 0 \quad \text{auf } \Gamma_K$$

$$(11) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \text{in } \Omega_W \quad \text{und} \quad \vec{j} \cdot \vec{n}_K = \vec{j} \cdot \vec{n}_W = 0 \quad \text{auf } \Gamma_K \quad \text{und } \Gamma_W$$

Hier ist $\vec{\nabla}$ der Divergenzoperator und \vec{n}_K und \vec{n}_W sind die Normalenvektoren auf die Kern- bzw. Wicklungskontur. Die Divergenz eines beliebigen Vektorfeldes \vec{v} lautet in Zylinderkoordinaten:

$$(12) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Nachprüfen von (10) zeigt, dass die magnetische Induktion bereits alle gestellten Bedingungen erfüllt. Die Stromdichte jedoch hat noch den Freiheitsgrad $\alpha(r, z)$, der durch Gleichung (11) nun endgültig determiniert wird. Anwenden von (12) auf (11), Einsetzen von (8) und (9) und partielle Differentiation führen auf:

$$(13) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cos(\alpha))}{\partial r} + \frac{\partial \sin(\alpha)}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sin(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \cos(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial z} = -\frac{1}{r} \cos(\alpha)$$

Gleichung (13) ist eine quasilineare, inhomogene, hyperbolische, partielle Differentialgleichung erster Ordnung für das skalare Feld $\alpha(r, z)$. Eine intuitivere Darstellung ist möglich, wenn die Gleichung in Form eines Skalarproduktes geschrieben wird (Konstruktion siehe Abb. 2):

$$(14) \quad \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_r \alpha \\ \partial_z \alpha \end{pmatrix} = -\frac{1}{r} \cos(\alpha)$$

Der erste Spaltenvektor in (14) ist der Normalenvektor auf eine Windungslinie ω mit lokaler Orientierung α . Der zweite Spaltenvektor ist der Gradient des Feldes α im rz -Raum. Wir kennen somit die lokale Projektion des Gradienten auf die Orthogonaltrajektorie ϑ , also die Winkeländerung in Richtung von ϑ . Dies entspricht aber gerade der Krümmung von ϑ selbst, denn die Orientierung von Windungslinie und Orthogonaltrajektorie unterscheiden sich nur um einen konstanten Wert $\pi/2$ und Krümmung ist bekanntlich Winkeländerung pro Einheitsbogenlänge. Wir werden später sehen, dass diese Information ausreicht um die Orthogonaltrajektorien, welche die Charakteristiken von (14) sind, zu berechnen.

Die Kenntnis der Orthogonaltrajektorien ist aus folgendem Grund wichtig: Sie beginnen auf Γ_K und enden auf Γ_W (siehe Abb. 2). Weil der "Abstand" der beiden Konturen durch die Wicklungsquerschnittsfläche $A_W = \pi$ festgelegt ist, existiert eine eindeutige Abbildung $\Gamma_K \rightarrow \Gamma_W$. Ist diese bekannt, dann ist die Volumen Kennziffer einzig als Funktion der Kernkontur aufzufassen: $z_V = z_V(\Gamma_K)$. Diese Form erlaubt es, z_V auf der Definitionsmenge aller zulässigen Γ_K 's zu minimieren.

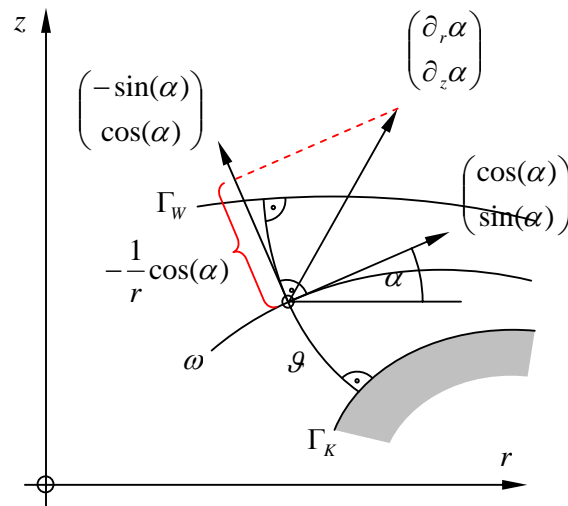


Abb. 2: Geometrische Bedeutung der partiellen Differentialgleichung (14).

2.2 Bestimmungsgleichung für die Orthogonaltrajektorien

Im Folgenden geht es darum, die Gleichung (14) zu lösen. Dies ist möglich, denn hyperbolische partielle Differentialgleichungen zerfallen entlang von Charakteristiken in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Weil Gleichung (14) erster Ordnung in r und z ist, gibt es nur eine solche Charakteristik durch jeden Punkt der rz -Ebene. Wir wollen annehmen, diese Charakteristik sei in Funktion ihrer Bogenlänge s parametrisiert als $r = r(s)$ und $z = z(s)$ (siehe im Folgenden Abb. 3). Durch Anwendung der Kettenregel ergibt sich so die Änderungsrate von $\alpha(r, z)$ entlang der Charakteristik zu:

$$(15) \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \dot{z}$$

Hier wurde der Punkt für die Ableitung nach dem Bahnparameter s gesetzt gemäss $\dot{f} = df/ds$. Wir sehen, dass die linke Seite von (14) genau dann der totalen Ableitung (15) entspricht, wenn $\dot{r} = -\sin(\alpha)$ und $\dot{z} = \cos(\alpha)$ gilt. Dies bedingt allerdings, dass die Charakteristik immer senkrecht auf die Windungslinien steht und somit eine Orthogonaltrajektorie \mathcal{G} ist. Wir wollen von diesem Fall ausgehen und erhalten so für \mathcal{G} das folgende System dreier gekoppelter aber gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in s :

$$(16) \quad \mathcal{G}: \quad \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{r} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\alpha)/r \\ -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ r(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_K \\ r_K \\ z_K \end{pmatrix}$$

In (16) wurden die Anfangsbedingungen so gewählt, dass die Orthogonaltrajektorie auf Γ_K startet, wo $s = 0$ gelten soll. Der Integration von (16) steht nun nichts mehr im Wege. Es stellt sich einzig die Frage, bei welchem Wert von $s = s_w$ denn die Wicklungskontur Γ_w erreicht wird. Zu diesem Zweck muss unterwegs über die überstrichene Wicklungsquerschnittsfläche $A(s)$ Buch geführt werden. Beträgt diese A_w , dann überquert die Orthogonaltrajektorie soeben Γ_w . An dieser Stelle zeigt sich der Vorteil des vorliegenden Konzeptes, denn nur auf der Orthogonaltrajektorie gilt $dA = 2\pi r ds$ und somit:

$$(17) \quad \dot{A} = 2\pi r, \quad A(0) = 0$$

$$(18) \quad A(s_w) = A_w$$

Während (17) eine zusätzliche Differentialgleichung für $A(s)$ darstellt, ist (18) eine implizite Definition von Γ_w . Implizit deshalb, weil von s_w nur bekannt ist, dass es die Nullstelle der Funktion

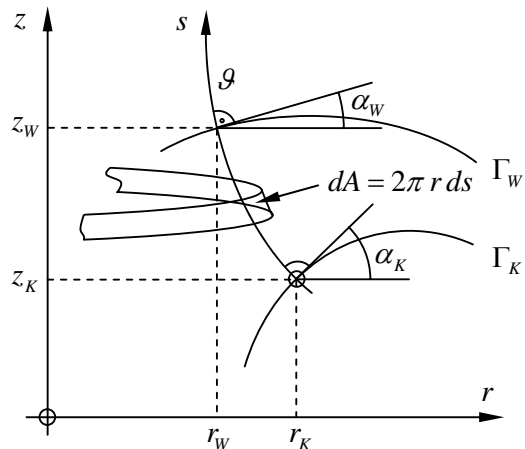


Abb 3: Charakteristik \mathcal{G} , ihre Start- und Endpunkte auf Γ_K und Γ_w und inkrementelle Wicklungsquerschnittsfläche dA .

$f(s_W) = A(s_W) - A_W$ ist. Die Auflösung nach s_W erfordert daher die Inversion von f . Solange $r > 0$ gilt, ist gemäss (17) $A(s)$ streng monoton steigend und f^{-1} somit eindeutig. Wir erhalten so den folgenden Ausdruck für die Wicklungskontur:

$$(19) \quad s_W = f^{-1}(0) \quad , \quad (20) \quad \begin{pmatrix} \alpha_W \\ r_W \\ z_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(s_W) \\ r(s_W) \\ z(s_W) \end{pmatrix}$$

Es zeigt sich also, dass tatsächlich eine eindeutige formale Zuordnung $\Gamma_K \rightarrow \Gamma_W$ existiert. Ein Algorithmus dazu kann direkt aus (16) - (20) gewonnen werden. Der erste Schritt besteht in der Integration von (16). Dies stellt sich als schwierig heraus, denn die Nichtlinearität und gegenseitige Kopplung der Gleichungen erlauben es nicht, Standardmethoden zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu verwenden. Trotzdem wollen wir an diesem Punkt nicht schon zu rechnergestützten Methoden greifen (= die Flinte ins Korn werfen)!

Wir starten mit der Feststellung, dass (16) unnötig kompliziert ist. Die Orientierung $\alpha(s)$ interessiert uns nämlich gar nicht, denn zur Auswertung von (2) werden nur Ortsdaten, nicht aber α_W auf Γ_W benötigt und zudem kann (17) auch ohne die Kenntnis von α integriert werden. Ferner ist auch die spezielle Parametrisierung in der Bogenlänge s nicht zwingend. Es ist daher erstrebenswert, α aus dem System zu eliminieren und eine gewöhnliche Differentialgleichung nur zwischen r und z aufzustellen. Diese wird zweiten Grades sein, da zwei Anfangsbedingungen zu erfüllen sind (Ort und Orientierung auf Γ_K). Wir differenzieren daher \dot{r} und \dot{z} aus (16) vorsorglich ein zweites mal um zu erhalten:

$$(21) \quad \ddot{r} = -\dot{\alpha} \cos(\alpha) = \frac{1}{r} \cos(\alpha) \dot{z} = \frac{\dot{z}^2}{r}$$

$$(22) \quad \ddot{z} = -\dot{\alpha} \sin(\alpha) = \frac{1}{r} \sin(\alpha) \dot{z} = -\frac{\dot{r} \dot{z}}{r}$$

Aus Gründen der Eindeutigkeit soll im Folgenden z als die unabhängige und r als die von z abhängige Variable gelten. Aus der Ketten- und Produktregel der Differentialrechnung ergibt sich so:

$$(23) \quad \dot{r} = \frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dz} \frac{dz}{ds} = r' \dot{z}$$

$$(24) \quad \ddot{r} = \frac{d^2 r}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{dz} \frac{dz}{ds} \right) = \frac{d^2 r}{dz^2} \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + \frac{dr}{dz} \frac{d^2 z}{ds^2} = r'' \dot{z}^2 + r' \ddot{z}$$

Hier wurde der Strich für die Ableitung nach z gesetzt gemäss $f' = df/dz$. Einsetzen von (23) in (22), (22) in (24) und schliesslich gleichsetzen von (24) mit (21) führt nach wenigen Umformungen zur sehr viel einfacheren Bestimmungsgleichung für \mathcal{G} :

$$(25) \quad \mathcal{G}: \quad r r'' = 1 + r'^2, \quad r(z_K) = r_K, \quad r'(z_K) = -\tan(\alpha_K) = v_K$$

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der Lösung dieses Anfangswertproblems.

2.3 Lösung der Orthogonaltrajektorien­gleichung

Die Differentialgleichung (25) kann analytisch gelöst werden. Den angenehmen Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen $\cosh'(z) = \sinh(z)$, $\sinh'(z) = \cosh(z)$ sowie $\cosh^2(z) = 1 + \sinh^2(z)$ sieht man bereits an, dass der Ansatz eines hyperbolischen Cosinus die Gleichung erfüllen wird. Allerdings gilt es noch zwei Integrationskonstanten zur Befriedigung der Anfangsbedingungen einzubauen. Die komplette Lösung lautet dann:

$$(26) \quad \mathcal{G}: \quad r(z) = C_1 \cosh\left(\frac{z - C_2}{C_1}\right), \quad C_1 = \frac{r_K}{\sqrt{1 + v_K^2}}, \quad C_2 = z_K - r_K \frac{\operatorname{asinh}(v_K)}{\sqrt{1 + v_K^2}}$$

Hier wurde $v_K = -\tan(\alpha_K) = r'(z_K)$ verwendet und mit $\operatorname{asinh}(\cdot)$ ist die zu $\sinh(\cdot)$ inverse Funktion gemeint. Zur Überprüfung der Anfangsbedingungen sei auf die folgende Identität hingewiesen:

$$(27) \quad \cosh(\operatorname{asinh}(\zeta)) = \sqrt{1 + \zeta^2}$$

Dank (26) sind wir jetzt in der Lage, einem Punkt der Kernkontur mit Daten $\{r_K, z_K, \alpha_K\}$ eindeutig die ihn passierende Orthogonaltrajektorie \mathcal{G} zuzuordnen. Wo schneidet \mathcal{G} die Wicklungskontur Γ_W ? Diese Frage kann mit Gleichungen (17) und (18) beantwortet werden. Im euklidischen Raum ist das Linienelement gegeben durch $ds^2 = dr^2 + dz^2$ oder $s' = \sqrt{1 + r'^2}$ und somit gilt in der neuen Parametrisierung:

$$(28) \quad A' = \frac{dA}{dz} = \frac{dA}{ds} \frac{ds}{dz} = \dot{A} s' = 2\pi r \sqrt{1 + r'^2} = 2\pi C_1 \cosh^2\left(\frac{z - C_2}{C_1}\right)$$

Integration von (28) zwischen Γ_K und Γ_W führt analog zu (18) nun auf eine implizite Bestimmungsgleichung für z_W :

$$(29) \quad A_W \equiv \left| \int_{z_K}^{z_W} A' dz \right| = \operatorname{sig}(z_W - z_K) \int_{z_K}^{z_W} A' dz = \operatorname{sig}(\cos(\alpha_K)) \int_{z_K}^{z_W} A' dz \\ = \operatorname{sig}(\cos(\alpha_K)) \pi C_1^2 \left[\frac{1}{2} \sinh\left(\frac{2(z_W - C_2)}{C_1}\right) - \frac{1}{2} \sinh\left(\frac{2(z_K - C_2)}{C_1}\right) + \frac{z_W - z_K}{C_1} \right]$$

Wegen $A_W > 0$ musste bei (29) die Integrationsrichtung durch den Vorzeichenterm $\operatorname{sig}(z_W - z_K)$ mit $\operatorname{sig}(\zeta) = \zeta/|\zeta|$ berücksichtigt werden damit die rechte Seite stets nichtnegative Werte annimmt. Erwägt man zudem die Form von \mathcal{G} gemäss Formel (26), dann kann aus Abbildung 3 direkt herausgelesen werden, dass $\operatorname{sig}(z_W - z_K) = \operatorname{sig}(\cos(\alpha_K))$ gilt. Beim Spezialfall $\cos(\alpha_K) = 0$ kann (29) wegen der Singularität von $v_K = -\tan(\alpha_K)$ nicht verwendet werden. Die Charakteristiken verlaufen dann aber parallel zur r -Achse und die Lösung kann somit intuitiv ergänzt werden (siehe nächstes Kapitel).

Zur Verifikation der Integration in (29) schliesslich substituere man in rechter Seite z für z_W , leite nach z ab und benutze die folgende Identität um (28) zurückzuerhalten:

$$(30) \quad \cosh(2\zeta) = 2\cosh^2(\zeta) - 1$$

Weil (29) eine transzendente Gleichung in z_W ist, kann keine analytische Lösung für z_W hingeschrieben werden. Ab hier müssen deshalb numerische Methoden zum Einsatz kommen. Trotzdem ist (29) ein Gewinn, denn die eindeutige Nullstelle einer reellwertigen Funktion zu finden ist mit sehr viel kleineren Kosten verbunden als die Integration von (13) oder des Systems (16). Ist z_W einmal bestimmt, dann folgt auch r_W aus (26).

2.4 Algorithmus zur Berechnung der Wicklungskontur

An dieser Stelle sei das genaue Vorgehen zur Berechnung der Ortsdaten $\{r_W, z_W\}$ auf Γ_W aus den Daten $\{r_K, z_K, \alpha_K\}$ auf Γ_K beschrieben. Wir starten mit der Form (29), welche folgendermassen als Nullstellenproblem für die gesuchte Grösse x umgeschrieben werden kann:

$$(31) \quad f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{2} \sinh(2(x+a)) + x - b$$

$$(32) \quad x = \frac{z_W - z_K}{C_1}, \quad a = \operatorname{asinh}(v_K), \quad b = \operatorname{sig}(\cos(\alpha_K)) \frac{A_W}{\pi C_1^2} + v_K \sqrt{1 + v_K^2}$$

Für die Vereinfachung von b wurde die Identität $\sinh(2\zeta) = 2\sinh(\zeta)\cosh(\zeta)$ verwendet. Da $f'(x) \geq 2$ gilt, ist die Nullstelle von f eindeutig und kann z.B. mit dem Newton-Algorithmus berechnet werden. Ist einmal x gefunden, dann können auch z_K mittels (32.1) und r_K mittels (26) bestimmt werden. Zusammengefasst:

| | |
|--|---|
| <u>Gegeben:</u> r_K, z_K, α_K, A_W | <u>Gesucht:</u> r_W, z_W |
| Wenn $\cos(\alpha_K) \neq 0$ dann: | |
| $v_K = -\tan(\alpha_K),$ | $C_1 = \frac{r_K}{\sqrt{1 + v_K^2}}$ |
| $a = \operatorname{asinh}(v_K),$ | $b = \operatorname{sig}(\cos(\alpha_K)) \frac{A_W}{\pi C_1^2} + v_K \sqrt{1 + v_K^2}$ |
| $x = f^{-1}(0)$ | mit $f(x) = \frac{1}{2} \sinh(2(x+a)) + x - b$ |
| $r_W = C_1 \cosh(x+a), \quad z_W = z_K + C_1 x$ | |
| Sonst wenn $\cos(\alpha_K) = 0$ dann: | |
| $r_W = \sqrt{r_K^2 - \operatorname{sig}(\sin(\alpha_K)) \frac{A_W}{\pi}},$ | $z_W = z_K$ |

2.5 Gültigkeit der Charakteristikenlösung und spezielle Randdaten

Mit dem Algorithmus (33) liegt eine sehr schnelle und einfache Methode vor, wie einer Kernkontur eindeutig eine Wicklungskontur zugeordnet werden kann. Die Methode stützt sich auf der Propagation der Randdaten α_K auf Γ_K entlang von Orthogonaltrajektorien, bzw. Charakteristiken \mathcal{C} der partiellen Differentialgleichung (13) / (14), es handelt sich also um eine Charakteristikenlösung.

An dieser Stelle muss auf einen besonderen Aspekt solcher Lösungen hingewiesen werden. Bei nichtlinearen, hyperbolischen Differentialgleichungen kann es je nach Art der Anfangsbedingungen zum sogenannten "Überschlagen" der Lösung kommen. Dies entspricht der Situation wenn sich zwei oder mehrere Charakteristiken an einer Stelle des Definitionsgebietes überschneiden und so eine mehrwertige Lösung erzeugen. Phänomene dieser Natur lassen sich z.B. bei Wasserwellen beobachten, die sich am Strand aufbäumen bis der Gipfel der Welle ihre Basis überholt. Während die Höhe der Welle im Tiefwasser eindeutig war, wird sie beim Brechen dreiwertig, was besonders Surfern grossen Spass bereitet (Abb. 4)! Die beschreibenden Flachwassergleichungen sind hyperbolisch, nichtlinear und sagen dieses Verhalten exakt voraus.



Abb. 4: Überschlagen der Wasserhöhe bei Brandungswellen.

Je nach physikalischer Situation macht eine mehrwertige Lösung aber keinen Sinn. So kann die Dichte eines Fluids beispielsweise nur nichtnegative und eindeutige Werte annehmen. Ist eine solche Grösse die Feldvariable eines nichtlinearen hyperbolischen Systems, dann treten bei der Durchdringung mehrerer Charakteristiken sogenannte "Stösse" auf. In der ursprünglich glatten Lösung tritt spontan ein Sprung auf, der sich mit einer eigenen Geschwindigkeit durch das Lösungsgebiet fortbewegt. Beispiele solcher Stösse sind von Explosionen ausgehende Detonationswellen oder Machkegel, die sich an mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Flugzeugen bilden (Abb. 5). Die das Gas beschreibenden Eulergleichungen sind ebenfalls hyperbolisch und nichtlinear.

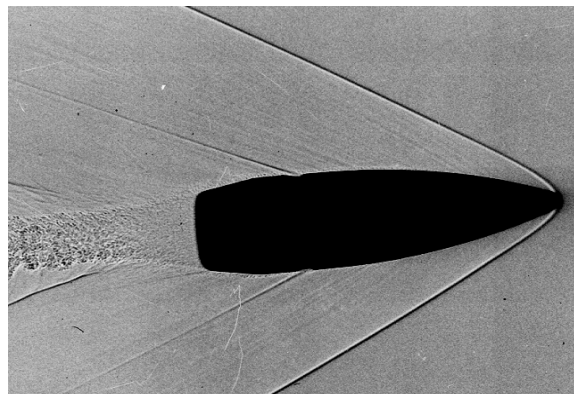


Abb. 5: Machwelle an einem die Schallmauer durchdringenden Flugzeug (links). Shadowgraph Aufnahme des Machkegels eines mit Überschallgeschwindigkeit fliegenden Projektils (rechts).

Auch die partielle Differentialgleichung (13) / (14), die das Richtungsfeld der Transformatorwicklung beschreibt, ist hyperbolisch und nichtlinear. Hier können Stöße in der Orientierung auftreten, wenn die Kernkontur örtlich zu stark einspringt (Abb. 6). Die ersten Windungen können auf die glatte Kernkontur problemlos aufgewickelt werden. Der Krümmungsradius der aufgetragenen Windungen wird allerdings immer kleiner, bis bei einer kritischen Schichtdicke eine scharfe, einspringende Ecke entsteht. An dieser Ecke bleibt die entsprechende Windungslinie ω zwar stetig, die Orientierung α springt aber an der Ecke um einen festen Betrag. Die Charakteristikenlösung würde in einem solchen Fall eine Schleife (gestrichelt) in der Wicklungskontur voraussagen, was keinen Sinn macht. Die korrekte Lösung erhält man erst nach Entfernen der Schleife. Noch extremer ist die Situation, wenn die Kernkontur selbst schon eine scharfe, einspringende Ecke aufweist. Dann überzieht der Stoss die gesamte Wicklung. Diese Problematik tritt bei streng konvexen Kerngeometrien nie auf und braucht uns daher im Folgenden nicht mehr zu beschäftigen.

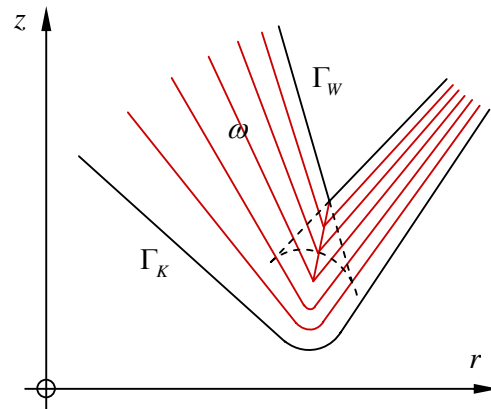


Abb. 6: Stoss im Wicklungsfeld aufgrund stark einspringender Kernkontur.

Ebenfalls zu diskutieren ist die Situation, wenn die Kernkontur scharfe, aber herausragende Ecken aufweist (Abb. 7). Es stellt sich die Frage, welche Daten α_K an der Ecke zu übernehmen sind wo doch die Orientierung à priori nicht eindeutig definiert ist. Stellt man sich die Ecke aber als einen infinitesimalen Kreisbogen vor, welcher den links- und rechtsseitigen Konturabschnitt mit definierten Orientierungen

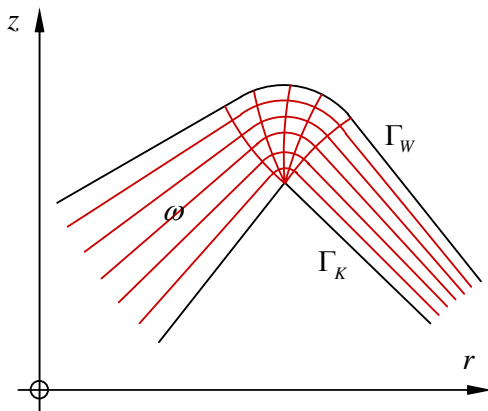


Abb. 7: Verdünnungsfächer im Wicklungsfeld um herausstehende Ecke.

$\alpha_{K,L}$ und $\alpha_{K,R} < \alpha_{K,L}$ verbindet, dann lautet die intuitive und gleichzeitig korrekte Antwort: Es sind alle Orientierungen $\alpha_K \in [\alpha_{K,R}, \alpha_{K,L}]$ zu berücksichtigen. An der Ecke wird also eine Schaar von Charakteristiken generiert, die dem gleichen Punkt $\{r_K, z_K\}$ entspringen, sich aber aus dem Orientierungsintervall $[\alpha_{K,R}, \alpha_{K,L}]$ bedienen. Auch diese Situation ist aus der Behandlung hyperbolischer Differentialgleichungen unter dem Begriff "Verdünnungsfächer" bekannt. Der Name wurde nicht ohne Grund von der fächerförmigen Anordnung der Charakteristiken abgeleitet.

An dieser Stelle wollen wir das Kapitel abschliessen. Es liegt nun eine Methode vor, die einer konvexen und stückweise stetig differenzierbaren Kernkontur Γ_K eine sinnvolle Wicklungskontur Γ_W im "Abstand" A_W zuordnet. Der zu diesem Zweck zu verwendende Algorithmus (33) wurde in vektorisierter Form in *MATLAB* implementiert und befindet sich im File */Kern_2_Wicklung/K2W.m*.

3. Berechnung der Volumenkennziffer

Im vorangegangenen Kapitel wurde aufgezeigt, dass Kern- und Wicklungskontur in nicht expliziter Weise voneinander abhängen. Dieser Umstand macht es sehr viel schwieriger, die Volumenkennziffer auf analytische Weise zu minimieren. Aus diesem Grund wird das weitere Vorgehen von rechnergestützten Methoden Gebrauch machen. In diesem Kapitel soll das Vorgehen bei der numerischen Berechnung der Volumenkennziffer beschrieben werden.

Ausgangslage ist dabei ein diskreter Datensatz von Orts- und Orientierungsdaten $\{r_K^i, z_K^i, \alpha_K^i\}$, $i=1\dots N$ in N gleichmäßig verteilten und geordneten Punkten P_K^i auf einer zulässigen Kernkontur Γ_K (Abb. 8). Aus dem letzten Kapitel wissen wir, dass mit Algorithmus (33) diesem Datensatz ein zweiter Satz von Ortsdaten $\{r_W^i, z_W^i\}$ in ebenfalls N Punkten P_W^i auf der Wicklungskontur Γ_W zugeordnet werden kann. Zur Berechnung der Volumenkennziffer müssen die Integrale (2) und (3) mit Hilfe dieser beiden Datensätze approximiert werden. Um Überschüssen zu vermeiden, werden die Konturen durch Polygonzüge angenähert und stückweise exakt integriert. Die Verbindungslinien zwischen zwei Punkten P_K^i und P_K^{i+1} , bzw. P_W^i und P_W^{i+1} sind somit Geraden und es gelten die Approximationen:

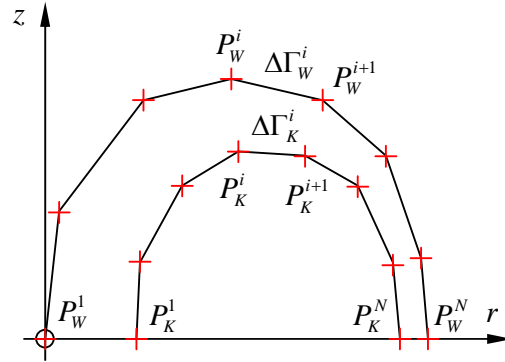


Abb. 8: Diskrete Repräsentation der Kern- und Wicklungskontur.

$$(34) \quad \begin{pmatrix} r(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_K^i \\ z_K^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_K^{i+1} - r_K^i \\ z_K^{i+1} - z_K^i \end{pmatrix} t, \quad t \in [0,1] \quad \text{auf} \quad \Delta\Gamma_K^i = \overline{P_K^i P_K^{i+1}}$$

$$(35) \quad \begin{pmatrix} r(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_W^i \\ z_W^i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_W^{i+1} - r_W^i \\ z_W^{i+1} - z_W^i \end{pmatrix} t, \quad t \in [0,1] \quad \text{auf} \quad \Delta\Gamma_W^i = \overline{P_W^i P_W^{i+1}}$$

Das Transformatorvolumen ist durch das Integral (2) definiert. Integration über einen Abschnitt $\Delta\Gamma_W^i = \overline{P_W^i P_W^{i+1}}$ der approximierten Kernkontur liefert mit Einsetzen von (35):

$$(36) \quad \begin{aligned} \Delta V_T^i &= 4\pi \int_{\Delta\Gamma_W^i} z r dr = 4\pi \int_0^1 (z_W^i + (z_W^{i+1} - z_W^i)t) (r_W^i + (r_W^{i+1} - r_W^i)t) (r_W^{i+1} - r_W^i) dt \\ &= \frac{2\pi}{3} (r_W^{i+1} - r_W^i) (r_W^i z_W^i + r_W^{i+1} z_W^{i+1} + (r_W^{i+1} + r_W^i)(z_W^{i+1} + z_W^i)) \end{aligned}$$

Das gesamte Transformatorvolumen V_T erhält man aus der Aufsummierung aller Inkremente ΔV_T^i :

$$(37) \quad V_T = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta V_T^i = \frac{2\pi}{3} \sum_{i=1}^{N-1} (r_W^{i+1} - r_W^i) (r_W^i z_W^i + r_W^{i+1} z_W^{i+1} + (r_W^{i+1} + r_W^i)(z_W^{i+1} + z_W^i))$$

Die Kernquerschnittsfläche ist durch das Integral (3) definiert. Integration über einen Abschnitt $\Delta\Gamma_K^i = \overline{P_K^i P_K^{i+1}}$ der approximierten Kernkontur liefert mit Einsetzen von (34):

$$(38) \quad \Delta A_K^i = 2 \int_{\Delta\Gamma_K^i} z dr = 2 \int_0^1 (z_K^i + (z_K^{i+1} - z_K^i)t) (r_K^{i+1} - r_K^i) dt = (r_K^{i+1} - r_K^i)(z_K^{i+1} + z_K^i)$$

Die gesamte Kernquerschnittsfläche A_K erhält man aus der Aufsummierung aller Inkremente ΔA_K^i :

$$(39) \quad A_K = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta A_K^i = \sum_{i=1}^{N-1} (r_K^{i+1} - r_K^i)(z_K^{i+1} + z_K^i)$$

Weil A_W von Beginn weg definiert worden ist, sind jetzt alle Angaben vorhanden damit die Volumen Kennziffer mittels Formel (1) berechnet werden kann. Eine entsprechende Prozedur wurde in *MATLAB* implementiert und befindet sich im File */Volumenkennziffer/ZV.m*.

4. Auslegungsfälle

Die in den vorangehenden Kapiteln vorgestellten Methoden werden nun genutzt um spezifische Kerngeometrien in Hinsicht auf die Volumen Kennziffer zu untersuchen. Als numerisches Hilfsmittel wird *MATLAB* verwendet, alle Programme sind als m-Files verfasst. Das Vorgehen folgt dabei dem Schema:

1. Definiere Γ_K unter Verwendung eines Satzes geometrischer Parameter und finde analytische, stückweise stetig differenzierbare Ausdrücke für Γ_K .
2. Definiere ein Stützstellengitter entlang Γ_K und bestimme an den Stützstellen mittels Punkt 1. die Daten $\{r_K^i, z_K^i, \alpha_K^i\}$.
3. Benutze die Prozedur *K2W.m* gemäss Kapitel 2 um dem Satz $\{r_K^i, z_K^i, \alpha_K^i\}$ die Daten $\{r_W^i, z_W^i\}$ auf Γ_W zuzuordnen.
4. Verwende die Prozedur *ZV.m* gemäss Kapitel 3 um aus den Datensätzen $\{r_K^i, z_K^i\}$ und $\{r_W^i, z_W^i\}$ die Volumen Kennziffer z_V zu berechnen.
5. Modifiziere und optimiere die geometrischen Parameter, bis die Volumen Kennziffer keine kleineren Werte mehr annimmt.
6. Verfeinere das Stützstellengitter und wiederhole Punkte 1. bis 5. bis sich die minimierte Volumen Kennziffer bis zu einer gewählten Genauigkeit nicht mehr ändert.

Zur Ausführung von Punkt 5. wird die *MATLAB*-Funktion *fminsearch* nach Nelder-Mead verwendet. Es werden nur konvergierte Resultate angenommen. Punkt 6. wird jeweils separat durch manuelle Erhöhung von N geprüft. Die angestrebte Genauigkeit ist dabei $\Delta z_V = \pm 10^{-6}$. Das Stützstellengitter wird demzufolge solange verfeinert, bis sich die sechste Nachkommastelle der Volumen Kennziffer nicht mehr ändert.

4.1 Kreisförmige Kernkontur $\min(z_v) = 10.368222 \pm 10^{-6}$

Die einfachste geometrische Form überhaupt ist der Kreis, denn abgesehen von der Lage seines Mittelpunktes wird nur dessen Radius ρ zur vollständigen Beschreibung benötigt. Um sich mit den Minimumseigenschaften der Volumenkennziffer vertraut zu machen, wollen wir daher als erstes eine kreisförmige Kernkontur annehmen. Es soll per Definition $A_w = \pi$ gelten. Damit die Konstruktion möglichst kompakt wird, darf kein Freiraum um die z -Achse bestehen (dies wirkt sich nur negativ auf z_v aus). Der Kreis muss deshalb bei $r=1$, $z=0$ beginnen und sein Radius ρ soll der freie Optimierungsparameter sein. Die Kernkontur ist somit im ersten Quadranten der rz -Ebene gegeben durch:

$$(40) \quad \Gamma_K : \begin{pmatrix} r_K \\ z_K \\ \alpha_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \rho(1 - \cos(\phi)) \\ \rho \sin(\phi) \\ \pi/2 - \phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, \pi]$$

Die Orientierung α_K in (40) lässt sich einfach herleiten indem das Argument des Tangentenvektors an Γ_K bestimmt wird gemäss:

$$(41) \quad \alpha_K = \arg(\dot{r}_K + i \dot{z}_K) = \frac{\pi}{2} - \phi$$

Hier ist $\arg(\cdot)$ durch $\arg(e^{i\varphi}) = \varphi \bmod 2\pi$ definiert, $i = \sqrt{-1}$ ist die imaginäre Einheit und der Punkt indiziert Ableitung nach ϕ , also $\dot{f} = df/d\phi$. Mit diesen Angaben kann die Optimierung gestartet werden. Das Resultat ist Abb. 9 zu entnehmen.

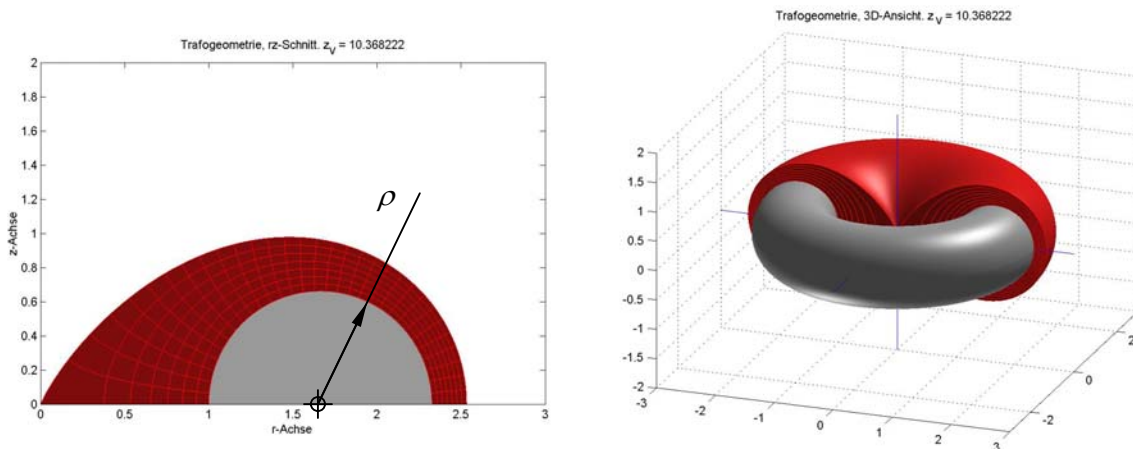


Abb. 9: Optimiertes Resultat für einen Transformator mit kreisförmiger Kernkontur. Links: 2D-Schnittbild in rz -Ebene. Rechts: 3D-Ansicht mit aufgeschnittener Wicklung.

Der Kernradius, bei dem sich das Minimum $z_v = 10.368222$ einstellt beträgt $\rho = 0.663535$. Diese Geometrie vermag also den bis heute bekannten Minimalwert von $z_v = 10.73$ bereits zu unterschreiten.

Die Krümmung der Orthogonaltrajektorien bei niedrigen r -Werten zeigt hier bereits deutlich auf, dass vereinfachte Annahmen z.B. kegelförmiger Wicklungsquerschnittsflächen eindeutig zu falschen Ergebnissen bei der Konstruktion der Wicklungskontur führen würden. Die korrekten Querschnittsflächen sind Katenoiden, die durch die Revolution von hyperbolischen Funktionen gemäss Formel (26) um die z -Achse entstehen. Beachtenswert ist zuletzt der Verlauf der Wicklungskontur in der Nähe des Ursprunges: Obwohl die Kernkontur eine vertikale Tangente bei $\phi = 0$ hat, löst sich die Wicklungskontur unter Einschluss eines Winkels von ca. 30° von der z -Achse. Dieses Verhalten wird immer dann beobachtet, wenn die Krümmung der Kernkontur an der Stelle grösster Annäherung zur z -Achse nicht verschwindet und die Wicklungsquerschnittsfläche so gewählt ist, dass Γ_w dort die z -Achse berührt.

Um die Güte des Ergebnisses zu bestätigen, ist bei jeder Optimierung eine Konvergenzstudie zu unternehmen. Auch die Eindeutigkeit des Minimums sollte überprüft werden, was visuell für einen oder zwei geometrische Parameter möglich ist, bei Optimierungen in höherdimensionalen Räumen aber schnell an der Darstellbarkeit scheitert.

In Tabelle 1 sind die Werte von ρ und z_v gegen die Anzahl verwendeter Stützstellen aufgetragen. Jeder Eintrag ist das Ergebnis einer Optimierung, die erfolgreich abgeschlossen wurde, was bedeutet, dass der Optimierungsalgorithmus z_v bis auf ein Intervall von $\Delta z_v = \pm 10^{-9}$ einschränken konnte. Wir sehen daraus, dass die dominante Fehlerquelle der Diskretisierungsgrad ist. Erst bei 4001 Stützstellen können wir davon ausgehen, dass eine weitere Verfeinerung des Stützstellengitters nur noch Veränderungen in Grössenordnungen kleiner als $\Delta z_v = \pm 10^{-6}$ bewirken wird. Eine weitere wichtige Erkenntnis ist, dass die Volumenkenzziffer zu gut ausfällt, wenn grob diskretisiert, d.h. schlecht modelliert wird.

| # Stützstellen | ρ | z_v |
|----------------|-------------|--------------|
| 7 | 0.664733924 | 10.349962179 |
| 15 | 0.663784355 | 10.365509023 |
| 31 | 0.663594028 | 10.367706131 |
| 63 | 0.663549519 | 10.368113006 |
| 125 | 0.663538617 | 10.368196859 |
| 251 | 0.663535738 | 10.368216363 |
| 501 | 0.663535023 | 10.368220884 |
| 1001 | 0.663534838 | 10.368221976 |
| 2001 | 0.663534760 | 10.368222243 |
| 4001 | 0.663534725 | 10.368222308 |

Tab. 1: Konvergenztest für kreisförmige Kernkontur.

In Abb. 10 schliesslich ist die Lage des gefundenen Minimums auf der Kurve $z_v(\rho)$ eingetragen. Zu erkennen ist, dass das Minimum zwar eindeutig ist, aber in einem relativ flachen Kessel sitzt. Die Konsequenzen werden sein: Es ist gut möglich das Minimum von z_v zu finden, die zugehörigen Geometrieparameter können jedoch mit grösseren Fehlern beaufschlagt sein.

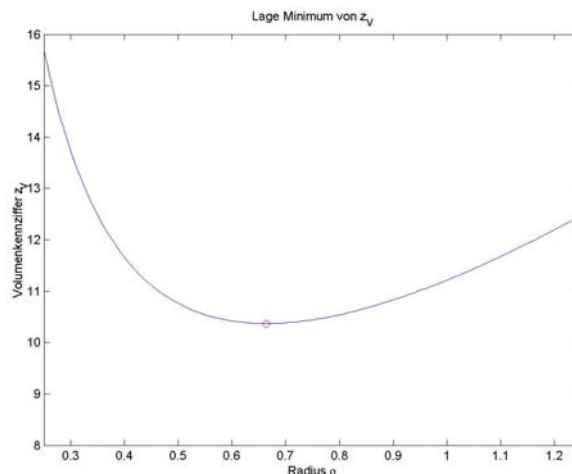


Abb. 10: Lage des Minimums von z_v .

4.2 Rechteckförmige Kernkontur

$$\min(z_V) = 10.568608 \pm 10^{-6}$$

Eine weitere interessante Geometrie ist der klassische Topftransformator, bei dem die Kernkontur rechteckig ist und folglich durch zwei geometrische Parameter charakterisiert wird: Die Breite b und Höhe h . Auch hier soll die Wicklungsquerschnittsfläche $A_W = \pi$ betragen und die Kernkontur soll bei $r=1$, $z=0$ starten um keinen unnötigen Freiraum um die z -Achse zu verursachen. Da bei dieser Kerngeometrie scharfe Ecken entstehen und Γ_K daher nur stückweise stetig ist, muss die im Kapitel 2.5 beschriebene Methode zum Einsatz kommen:

$$(42) \quad \Gamma_K: \begin{pmatrix} r_K \\ z_K \\ \alpha_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ [0, h/2] \\ \pi/2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1 \\ h/2 \\ [\pi/2, 0] \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} [1, 1+b] \\ h/2 \\ 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1+b \\ h/2 \\ [0, -\pi/2] \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 1+b \\ [h/2, 0] \\ -\pi/2 \end{pmatrix}$$

Das Resultat der Optimierung ist in Abb. 11 festgehalten. Das Minimum $z_V = 10.568608$ stellt sich bei den Abmessungen $b = 1.028967$ und $h = 1.99714$ ein. Auch hier ist die Volumenkennziffer also niedriger als der bisherige Wert $z_V = 10.73$. Dies ist deshalb interessant, weil gemäss Erläuterungen $z_V = 10.73$ bei einem Topftransformator derselben Gestalt wie der hier berechneten erreicht worden war. Erklärungen können sein, dass die bisher benutzten Methoden zur Berechnung der Wicklungskontur nicht exakt waren oder dass absichtlich eingeführte konstruktive Merkmale zur Verschlechterung der Volumenkennziffer beigetragen hatten.

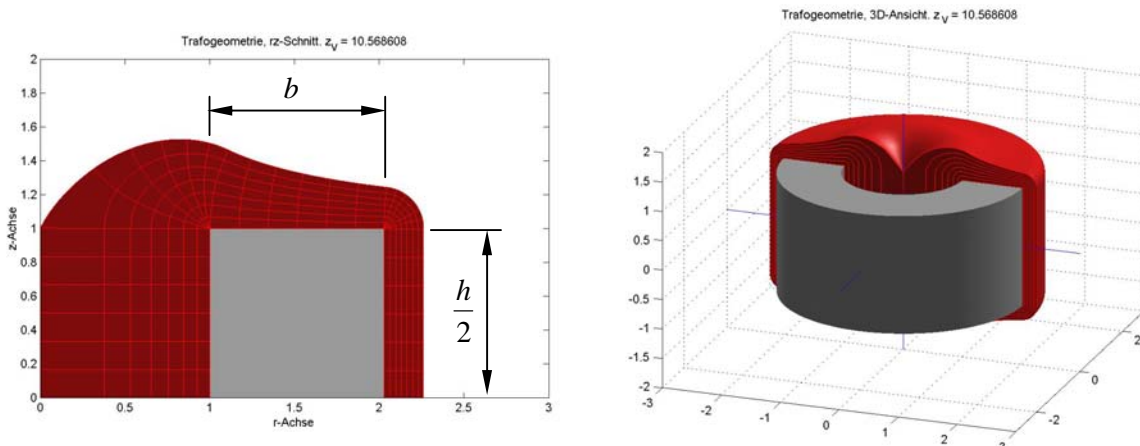


Abb. 11: Optimiertes Resultat für einen Transformator mit rechteckförmiger Kernkontur. Links: 2D-Schnittbild in rz -Ebene. Rechts: 3D-Ansicht mit aufgeschnittener Wicklung.

In Abb. 11 links ist schön zu erkennen, wie die Windungen um die Ecken gelegt sind. Auch hier löst sich die Wicklungskontur unter einem Winkel von ca. 45° von der z -Achse ab, es entsteht also auf der Ober- und Unterseite des Transformators eine lokal kegelförmige Eindellung. Die Orientierung α_W springt dabei nur auf der äussersten Windungslinie, die unmittelbar darunterliegenden Schichten haben stetige Orientierungsverläufe.

In Tabelle 2 sind wiederum die Breite b , Höhe h und die Volumenkennziffer z_V gegen die Anzahl verwendeter Stützstellen aufgetragen. Auch hier handelt es sich bei allen Einträgen um bezüglich der Minimierung konvergierte Daten, d.h. dass der

Optimierungsalgorithmus z_V jedesmal bis auf ein Intervall von $\Delta z_V = \pm 10^{-9}$ einschränken konnte. Hier ist die erwünschte Genauigkeitsordnung von $\Delta z_V = \pm 10^{-6}$ erst bei 12800 Stützstellen erreicht. Der Grund besteht darin, dass nur schon die Behandlung der beiden Ecken zusammen ähnlich aufwendig ist wie die Berechnung der kreisförmigen Kernkontur.

| # Stützstellen | b | h | z_V |
|----------------|-------------|-------------|--------------|
| 25 | 1.022722040 | 1.983845662 | 10.546845000 |
| 50 | 1.027739759 | 1.994567452 | 10.564374891 |
| 100 | 1.028693256 | 1.996574655 | 10.567674579 |
| 200 | 1.028902251 | 1.997008112 | 10.568389686 |
| 400 | 1.028951114 | 1.997108318 | 10.568555409 |
| 800 | 1.028962988 | 1.997132176 | 10.568595166 |
| 1600 | 1.028965866 | 1.997137596 | 10.568604883 |
| 3200 | 1.028966494 | 1.997139420 | 10.568607283 |
| 6400 | 1.028966752 | 1.997139648 | 10.568607879 |
| 12800 | 1.028966857 | 1.997139510 | 10.568608027 |

Tab. 2: Konvergenztest für rechteckige Kernkontur.

Auch in diesem Fall ist es noch gut machbar, die Umgebung des Minimums zu untersuchen. Zu diesem Zweck ist in Abb. 12 ein Konturplot der Volumen Kennziffer gegen die beiden geometrischen Parameter b und h aufgetragen. Niveaus gleicher Volumen Kennziffer sind mit farbigen Isolinien markiert, die Farbcodierung ist am Balken rechts der Figur ablesbar. Die gefundene Lösung ist durch einen Kreis markiert. Das Einzugsgebiet von b und h ist dabei beachtlich. Jede Optimierung wurde zwar mit den identischen Anfangswerten $b = h = 1$ gestartet, Versuche zeigen aber, dass größere Variationen der Startwerte keinen Einfluss auf das Endergebnis haben. Es scheint sich also auch hier um ein globales und eindeutiges Minimum zu handeln.

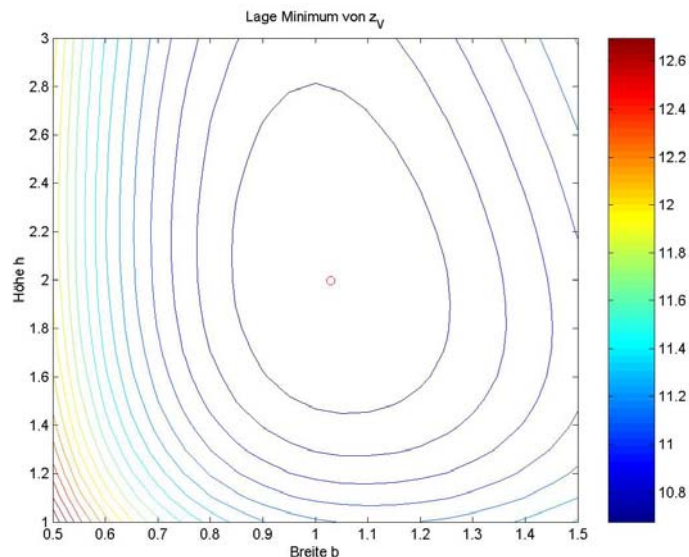


Abb. 12: Lage des Minimums von z_V .

Zuletzt sei darauf hingewiesen, dass mit der rechteckigen Kernkontur eine schlechtere Volumen Kennziffer erzielt wird als mit der kreisförmigen Variante. Die Tendenz besteht genz allgemein darin, dass abgerundete, elliptische Formen die kleinsten Werte von z_V liefern.

4.3 Tropfenförmige Kernkontur

$$\min(z_V) = 10.073658 \pm 10^{-6}$$

Im letzten Beispiel wird jene Konstruktion vorgestellt, mit welcher der kleinste Wert von z_V erreicht wird. Ihr vorausgegangen sind einfachere, verwandte Geometrien, die hier aber nicht ausführlich behandelt werden sollen. Die Hauptidee aus diesen Studien war, dass sich die Kerngeometrie zur Minimierung von z_V ähnlich wie ein Wassertropfen auf einer glatten, komplett wasserabstossenden Fläche verhält, wobei die "Fläche" in unserem Fall parallel zur z -Achse ist und das "Schwerefeld" in negative r -Richtung zeigt!

Der Wassertropfen nimmt eine Form an, die seine totale Energie minimiert. Diese setzt sich aus der Lage- und Oberflächenenergie zusammen. Als Nebenbedingung muss das Tropfenvolumen konstant bleiben. Damit der Tropfen die Oberflächenenergie minimiert, nimmt er eine möglichst kugelförmige Gestalt an, welche von allen Formen gegebenen Volumens die kleinste Oberfläche aufweist. Gleichzeitig lohnt es sich aber auch, den Kontaktpunkt mit der Unterlage etwas abzuflachen um so den Massenschwerpunkt zu senken und dadurch auch die Lageenergie zu reduzieren. Diese wäre minimal, wenn der Tropfen zu einer infinitesimal flachen Scheibe zerfließen könnte. Wird die Abplattung allerdings zu stark, dann beginnt die Oberfläche und damit die Oberflächenenergie stark anzusteigen. Die günstigste Konfiguration besteht schlussendlich in einem geschickten Kompromiss (Abb. 13). Der Tropfen ist ellipsenartig und teilt sich mit der Unterlage eine beschränkte, ebene Kontaktfläche.



Abb. 13: Tropfenform als Resultat der Minimierung von Lage- und Oberflächenenergie.

Beim toroidalen Transformator sind die Analogien zum Wassertropfen wie folgt: Die Kernquerschnittsfläche entspricht dem Volumen des Tropfens, die mittlere Windungslänge der Tropfenoberfläche und die zylindrische Geometrie erzeugt einen Effekt, welcher der Schwerebeschleunigung gleicht. Letzteres weil das Volumen eines magnetischen Leiterelementes konstanter Querschnittsfläche proportional zu dessen Umfang und somit proportional zu r ist (vgl.: die Lageenergie ist proportional zur Höhe des Schwerpunktes über Grund). Die Kernkontur versucht daher möglichst nahe an die z -Achse heranzurücken um so das minimale Transformatorvolumen zu erzielen. Gleichzeitig soll aber die Kernquerschnittsfläche so gross wie möglich sein, am besten unter minimalem Umfang, denn dieser wirkt sich über die mittlere Windungslänge negativ auf das Volumen aus.

Es sind also ähnliche Effekte in Kraft wie beim Wassertropfen, bei der Modellierung der Kernkontur sollte deshalb auf diesen Aspekt Rücksicht genommen werden. Standardmässig soll Γ_K bei $r=1$, $z=0$ starten wobei die Wicklungsquerschnittsfläche zu $A_W = \pi$ gesetzt ist. Die Kernkontur wird nun aus drei Bestandteilen zusammengesetzt (Abb. 14):

- Einem vertikalen Geradenstück der Länge c , entspricht "Kontaktfläche",
- einer Ellipse mit Halbachsen a in r -Richtung und b in z -Richtung,
- n überlagerten Fouriermoden mit Koeffizienten f_k , $k = 1 \dots n$.

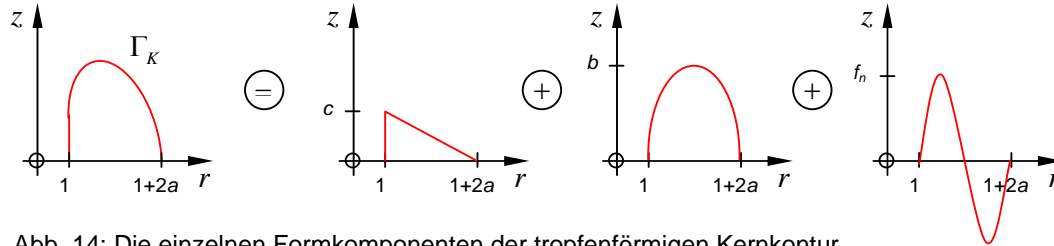


Abb. 14: Die einzelnen Formkomponenten der tropfenförmigen Kernkontur.

Zur Berechnung der Daten $\{r_K^i, z_K^i, \alpha_K^i\}$ ist wiederum eine mathematische Formulierung von Γ_K notwendig. Das Geradenstück ist dabei trivial, zum Nachvollzug des ellipsenartigen Überbaus vergleiche man mit Abb. 14:

$$(43) \quad \Gamma_K : \begin{pmatrix} r_K \\ z_K \\ \alpha_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ [0, c] \\ \pi/2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} \eta(\phi) \\ \zeta(\phi) \\ \arg(\dot{\eta}(\phi) + i\dot{\zeta}(\phi)) \end{pmatrix}, \quad \phi \in [0, \pi]$$

$$\eta = 1 + a(1 - \cos(\phi))$$

$$\zeta = b \sin(\phi) + \frac{c}{2}(1 + \cos(\phi)) + \sum_{k=1}^n f_k \sin\left(\frac{k\pi}{2a}(\eta - 1)\right)$$

$$\dot{\eta} = a \sin(\phi)$$

$$\dot{\zeta} = b \cos(\phi) - \frac{c}{2} \sin(\phi) + \frac{\pi \dot{\eta}}{2a} \sum_{k=1}^n k f_k \cos\left(\frac{k\pi}{2a}(\eta - 1)\right)$$

Die Form (43) der Kernkontur hat die Eigenschaft, dass sie einmal stetig differenzierbar ist, der Verlauf der Orientierung α_K ist zusammenhängend, insbesondere beim Übergang vom Geradenstück auf den elliptischen Überbau. Die Krümmung hingegen ist an diesem Ort nicht mehr stetig, sie springt von Null auf einen definierten Wert. Dies hat zur Folge, dass sich die Wicklungskontur unter einem endlichen Winkel von der z -Achse lösen wird. Versuche mit verschiedenen oft stetig differenzierbaren Kernkonturen zeigen, dass dieser Ansatz die besten Ergebnisse erzielt.

Die Optimierung wurde mit einem groben Gitter und mit $n=0$ Fourierkoeffizienten gestartet. Die optimierten Parameter a , b und c wurden dann als Startwerte für die nächste Optimierung benutzt und der erste Fourierkoeffizient f_1 als weiterer Freiheitsgrad hinzugenommen, also $n=1$. Die Anzahl Fourierkoeffizienten wurde solange erhöht, bis der Einfluss auf z_v unter die gewünschte Genauigkeit $\Delta z_v = \pm 10^{-6}$ fiel, was bei $n=16$ der Fall ist. Danach wurde das Stützstellengitter verfeinert, bis auch hier der Unterschied unter $\Delta z_v = \pm 10^{-6}$ fiel. Es wurden nur bezüglich der Optimierungsprozedur konvergierte Resultate angenommen.

Das Resultat der Optimierung ist Abb. 15 zu entnehmen. Zu erkennen ist, dass die Kernkontur tatsächlich eine tropfenförmige Gestalt annimmt. Man beachte, dass die Fouriermoden es der Lösung prinzipiell erlauben würden, eine im Rahmen der spektralen Begrenzung beliebige Form anzunehmen, eingestellt hat sich jedoch die in Abb. 15 dargestellte. Das Minimum $z_V = 10.073658$ geht einher mit einem vertikalen Geradenabschnitt der Länge $c = 0.344474$ und einer Kernbreite von $2a = 1.130797$. Die genauen Werte dieser Konstruktion entnehme man Tab. 3.

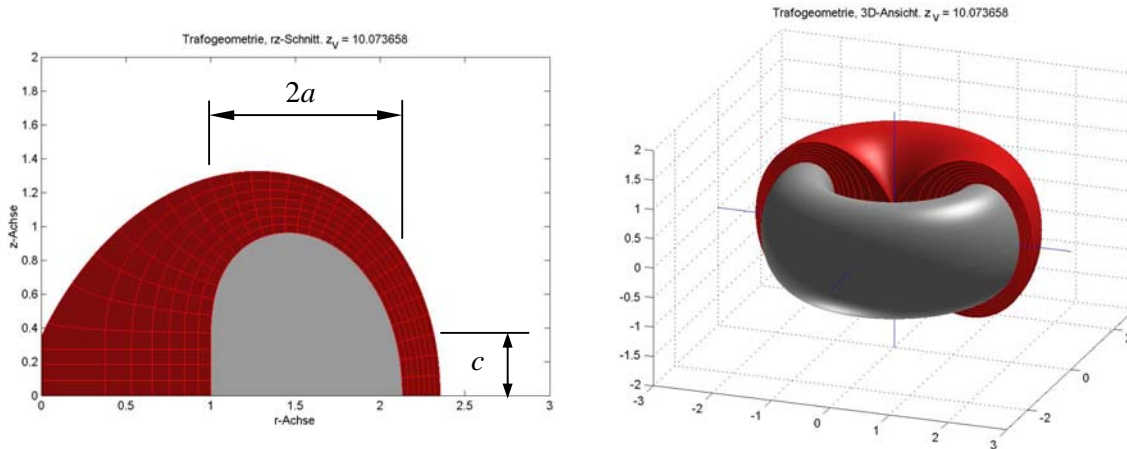


Abb. 15: Optimiertes Resultat für einen Transformator mit tropfenförmiger Kernkontur. Links: 2D-Schnittbild in rz -Ebene. Rechts: 3D-Ansicht mit aufgeschnittener Wicklung.

| | | | | | | | | | | |
|------------|--------------|---|------------|--------------|---|------------|--------------|---|------------|--------------|
| $V_T =$ | 36.948483022 | ; | $A_K =$ | 1.800511845 | ; | $A_W =$ | 3.141592654 | ; | $z_V =$ | 10.073658425 |
| $a =$ | 0.565398469 | ; | $b =$ | 0.931298283 | ; | $c =$ | 0.344474075 | | | |
| $f_1 =$ | -0.163217558 | ; | $f_2 =$ | -0.016508190 | ; | $f_3 =$ | -0.013609550 | ; | $f_4 =$ | -0.002884218 |
| $f_5 =$ | -0.004007812 | ; | $f_6 =$ | -0.000775031 | ; | $f_7 =$ | -0.001670103 | ; | $f_8 =$ | -0.000220800 |
| $f_9 =$ | -0.000805897 | ; | $f_{10} =$ | -0.000046392 | ; | $f_{11} =$ | -0.000410085 | ; | $f_{12} =$ | 0.000006306 |
| $f_{13} =$ | -0.000202278 | ; | $f_{14} =$ | 0.000013458 | ; | $f_{15} =$ | -0.000080629 | ; | $f_{16} =$ | 0.000001293 |

Tab. 3: Kenndaten und geometrische Parameter der optimierten Transformatorgeometrie.

Die Umgebung des Lösungsminimums kann in diesem Fall kaum mehr global untersucht werden, denn nur schon die Überprüfung eines Teilgebietes des hier 19-dimensionalen Parameterraums sprengt jeden Rahmen. Trotzdem legen die vorangegangenen Analysen es nahe, das Minimum als "brav" einzustufen. Tabelle 4 ist der numerische Konvergenztest zu entnehmen. Bei jeder Gitterverfeinerung wurde es dem Optimierungsalgorithmus freigelassen, die Konstruktionsparameter neu zu wählen. Bei 14629 Stützstellen kann davon ausgegangen werden, dass die Approximation der Kernkontur durch einen Polygonzug einen Fehler kleiner als $\Delta z_V = \pm 10^{-6}$ verursacht.

Das vorliegende Resultat $\min(z_V) = 10.073658 \pm 10^{-6}$ konnte durch keine andere Geometrie übertroffen werden und ist nach Ansicht des Autors das untere Limit, welches bei toroidaler Bauweise zu erreichen ist. Gegenüber dem bis heute kleinsten bekannten Wert von $z_V = 10.73$ bedeutet dies eine Reduktion der Volumen Kennziffer um 6.117%, die Arbeit kommt also zu einem erfolgreichen Abschluss.

| # Stützstellen | a | b | c | z _v |
|----------------|-------------|-------------|-------------|----------------|
| 114 | 0.565441603 | 0.926649169 | 0.345661794 | 10.073519723 |
| 229 | 0.565408641 | 0.930209235 | 0.344758959 | 10.073624311 |
| 457 | 0.565400837 | 0.931045361 | 0.344542127 | 10.073649971 |
| 914 | 0.565398943 | 0.931247321 | 0.344489064 | 10.073656326 |
| 1829 | 0.565398496 | 0.931292774 | 0.344476704 | 10.073657907 |
| 3657 | 0.565398475 | 0.931295106 | 0.344475016 | 10.073658301 |
| 7314 | 0.565398501 | 0.931297169 | 0.344474172 | 10.073658400 |
| 14629 | 0.565398469 | 0.931298283 | 0.344474075 | 10.073658425 |

Tab. 4: Konvergenztest für tropfenförmige Kernkontur.

4.4 Verifikation der Daten

Für den an der Verifikation des im Kapitel 4.3 hergeleiteten Resultates interessierten Leser stehen alle Daten auf der beigelegten CD in der Matlab-Datei */Datenverifikation/Daten.mat* zur Verfügung. Nach dem Öffnen eines *MATLAB* Kommandofensters und der Eingabe des Befehls *load Daten.mat* werden die folgenden Variablen in den Workspace geladen:

- Kenndaten der Konstruktion gemäss Tabelle 3: VT, AK, AW, ZV, a, b, c, f(16,1)
- Kerndaten: rK(14629,1), zK(14629,1), alphaK(14629,1)
- Wicklungsdaten: rW(14629,1), zW(14629,1), alphaW(14629,1)

Der Leser kann nun nach eigenem Ermessen die Konsistenz des Resultates überprüfen. Es können die bisher beschriebenen *MATLAB*-Routinen verwendet werden. Die Anleitung zu deren Gebrauch ist jeweils in den Kopfzeilen des Programms festgehalten.

5. Abschluss

5.1 Zum Autor

Ich habe von 1998 bis 2003 an der ETH Zürich Maschinenbau und Verfahrenstechnik studiert. Die vertieften Gebiete umfassen numerische Fluidodynamik, Maschinenkonstruktion- und Fertigung, Modellierung und Simulation dynamischer Systeme, experimentelle Dynamik und das Studium und experimentelle Erforschen der Thermomechanik von Stirlingmotorkomponenten.

Seit Sommer 2003 doktoriere ich am Zentrum für Mechanik im Bereich nichtlinearer Kontinuumsmechanik mit Fokus auf die Beschreibung hyperelastischer Kristalle und biologischer Gewebe. Im theoretischen Bereich gelten meine Interessen insbesondere der Herleitung und Lösung von Feldgleichungen in Physik und Ingenieurwissenschaften. Bei Fragen zur vorliegenden Arbeit stehe ich gerne unter der folgenden Anschrift zur Verfügung:

Ondrej Papes
Dipl. Masch.-Ing. ETH
IMES / Zentrum für Mechanik
ETH Zentrum, CLA G31
CH-8092 Zürich
Tel.: 01 / 632 77 54
Mail: ondrej.papes@imes.mavt.ethz.ch

5.2 Empfohlene Literatur

Zur Behandlung der Thematik wurden unter anderem folgende Werke konsultiert und seien aufgrund ihres umfassenden Inhaltes, Aufbaus und didaktischen Wertes dem interessierten Leser wärmstens empfohlen:

- "Classical Electrodynamics", John David Jackson, 1999
John Wiley & Sons, Inc.
ISBN 0-471-30932-X
- "Methoden der mathematischen Physik", Courant & Hilbert, 1993
Springer Verlag
ISBN 3-540-56796-8
- "Einführung in partielle Differentialgleichungen", Norbert Hugentobler
vdf Hochschulverlag AG
ISBN 3-7281-2303-X
- "Numerical Methods for Conservation Laws", Randall J. LeVeque, 1999
Birkhäuser Verlag
ISBN 0-8176-2723-5